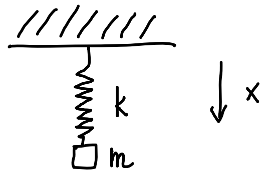
6. Tutorium

Samstag, 27. November 2021 15:23

I Der harmonische Oszillator

1.) Der klassische harmonische Oszillator



· klassisches Problem: Masse an einer Feder

→ Newtonsche Bewegungsgleichung: $F = m\cdot\ddot{x} = -kx$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

→ zugehöriges Potential $\boxed{V(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ $\qquad p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}$

→ die Hamilton Funktion erhalten wir durch eine Legendre Transformation zum Impuls

$$\Rightarrow H(x,p) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x} - \mathcal{L}(x,\dot{x})$$

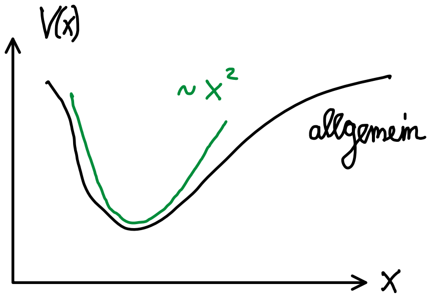
$$= m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\boxed{H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2} = T + V = E_{ges}$$

→ Hamilton-Funktion korrespondiert mit der Gesamtenergie

Warum ist der harmonische Oszillator so interessant?

· generische Potentiale im Minimum gut durch quadratische Potentiale näherbar!



Dynamische Beschreibung des harmon. Oszillators

$$k = \omega^2 m \quad\Rightarrow\quad \cancel{m}\ddot{x} + \omega^2\cancel{m}\,x = 0$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin(\omega t)$

für alle folgenden Rechnungen ist es sinnvoll die Hamilton-Funktion dimensionslos zu betrachten

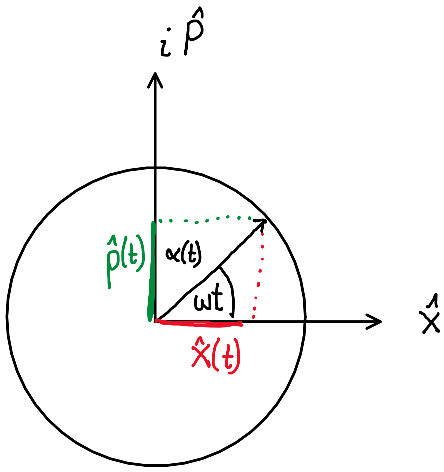
$$\underbrace{H(x,p)}_{\hbar\omega} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \qquad \Big|:\hbar\omega$$

$$\Rightarrow \quad \hat H = \underbrace{\frac{1}{m\hbar\omega}\frac{p^2}{2}}_{:=\hat p^2} + \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}_{:=\hat x^2} \qquad \hat p = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\,p \qquad \hat x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$$

$$\Rightarrow \quad \hat H = \frac{1}{2}\left(\hat p^2 + \hat x^2\right)$$

$$\hat x(t) = \hat x_0 \cos(\omega t) + \hat p_0 \sin(\omega t)$$
$$\hat p(t) = -\hat x_0 \sin(\omega t) + \hat p_0 \cos(\omega t)$$
$\frac{d}{dt}$

Wir können die Gesamtenergie auf einem Kreis im Phasenraum $(\hat x, \hat p)$ bzw. in der komplexen Ebene darstellen.



$\Rightarrow$ Phasendarstellung $a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat x + i\hat p\right)$

$$\Rightarrow \quad H = \hbar\omega\, \hat H = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat x^2 + \hat p^2\right) = \underline{\hbar\omega\, a^* a}$$

<u>Quantisierung des Problems:</u> $\hat H = \frac{1}{2} k \hat x^2 + \frac{1}{2m}\hat p^2$ Übergang zu Operatoren

$\Rightarrow \hat H = \hbar\omega\, \frac{1}{2}\left(\hat X^2 + \hat P^2\right)$ mit $\hat X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat x$ und $\hat P = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,\hat p$

Definiere nun einen Operator analog zur Phasendarstellung

$\hat a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat X + i\hat P\right)$ Vernichtungsoperator

$\hat a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat X - i\hat P\right)$ Erzeugeoperator

} Leiteroperator

$\hat X = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat a + \hat a^\dagger\right)$

$\hat P = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}\left(\hat a - \hat a^\dagger\right)$

Kommutatorrelationen:
$$[\hat a, \hat a^\dagger] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat X + i\hat P\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat X - i\hat P\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{[\hat X, \hat X]} - i[\hat X, \hat P] + i[\hat P, \hat X] - \cancelto{0}{[\hat P, \hat P]}\right)$$
$$= -i\,[\hat X, \hat P]$$
$$= -i \underbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{m\hbar^2\omega}}}_{1/\cancel{\hbar}} \underbrace{[\hat x, \hat p]}_{i\cancel{\hbar}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{[\hat a, \hat a^\dagger] = 1} \quad *$$

Wir können den Hamilton Operator nun schreiben als

$$\hat H = \hbar\omega\, \frac{1}{2}\left(\hat X^2 + \hat P^2\right) = \hbar\omega\, \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\hat a + \hat a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\hat a - \hat a^\dagger}{\sqrt{2}\,i}\right)^2\right]$$

$$= \hbar\omega \, \frac{1}{4} \left[\left(\cancel{\hat{a}^2} + \cancel{\hat{a}^{+2}} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} \right) - \left(\cancel{\hat{a}^2} + \cancel{\hat{a}^{+2}} - \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} \right) \right]$$

$$= \hbar\omega \, \frac{1}{2} \left(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} \right)$$

$$= [\hat{a}, \hat{a}^+] + \hat{a}^+\hat{a} \overset{*}{=} 1 + \hat{a}^+\hat{a}$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Definiere: $\boxed{\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}}$ Teilchenzahloperator

↳ hermitesch $\hat{N}^+ = (\hat{a}^+\hat{a})^+ = (\hat{a})^+ (\hat{a}^+)^+ = \hat{a}^+\hat{a} = \hat{N}$

$\Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$

Kommutatorrelationen: $[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^+ \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{=0} + \underbrace{[\hat{a}^+, \hat{a}]}_{=-1} \hat{a} = -\hat{a}$

$[\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$

Eigenwerte und Spektrum des harmonischen Oszillators

→ betrachte $\hat{N}|\varphi\rangle = n|\varphi\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{H}|\varphi\rangle = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) |\varphi\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |\varphi\rangle$

Untersuche nun die Eigenschaften von $n \in \mathbb{R}$ normiert, orthogonal

<u>Lemma 1:</u> $\langle\varphi|\hat{N}|\varphi\rangle = \langle\varphi|n|\varphi\rangle = n\langle\varphi|\varphi\rangle = n$

$= \langle\varphi|\hat{a}^+\hat{a}|\varphi\rangle$

$= \left(\langle\varphi|\hat{a}^+ \right) \cdot \left(\hat{a}|\varphi\rangle \right) = \| \hat{a}|\varphi\rangle \| > 0$

<u>Lemma 2:</u> $\hat{N}(\hat{a}|\varphi\rangle) = (n-1)(\hat{a}|\varphi\rangle)$

$= \left(\underbrace{[\hat{N}, \hat{a}]}_{-\hat{a}} + \hat{a}\hat{N} \right) |\varphi\rangle = (-\hat{a} + \hat{a}n)|\varphi\rangle = (n-1)(\hat{a}|\varphi\rangle)$

$\Rightarrow \hat{a}$ senkt den Eigenwert um 1 herab $\Rightarrow$ Vernichteroperator

analog $\hat{N}(\hat{a}^k|\varphi\rangle) = (n-k)\,\hat{a}^k|\varphi\rangle$

nehme nun an, dass $k > n$, dann würden die Eigenwerte von $\hat{N}$ negativ werden, was im Widerspruch zu Lemma 1 steht

$\Rightarrow$ es muss ein $k \in \mathbb{N}$ geben, sodass die Eigenwerte $(n-k)$ Null werden

$\Rightarrow$ n <u>muss</u> eine positive ganze Zahl sein (oder Null)

$$\Rightarrow \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

wir bezeichnen die Eigenzustände $|\varphi\rangle \rightarrow |n\rangle$